PART3　ベクトルの成分と演算，座標と成分表示

例題

(1)　$\vec{a}=(1,\ -1,\ 2)$，$\vec{b}=(0,\ 2,\ 1)$，$\vec{c}=(2,\ -1,\ -2)$ のとき，$|\vec{a}|$ を求めよ。また，$2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ を成分で表し，その大きさを求めよ。

(2)　$\vec{a}=(1,\ -2,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ -2)$，$\vec{c}=(3,\ -2,\ -2)$ のとき，$\vec{p}=(-2,\ 3,\ -2)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

Point Pickup

練習

(1) $\vec{a}=(3,\ 1,\ 4)$，$\vec{b}=(-1,\ 6,\ 3)$，$\vec{c}=(-2,\ 5,\ 4)$ のとき，$|\vec{c}|$ を求めよ。また，$2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$ を成分で表し，その大きさを求めよ。

(2) $\vec{a}=(0,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 2,\ -3)$，$\vec{c}=(3,\ 4,\ -1)$ のとき，$\vec{p}=(-6,\ 7,\ -3)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

第14講　PART3 確認問題

1　$\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$ のとき，$|\vec{a}|=\sqrt{\boxed{\text{アイ}}}$ である。

2　$\vec{a}=(1,\ 0,\ -1)$，$\vec{b}=(0,\ 2,\ 3)$，$\vec{c}=(-1,\ 2,\ 0)$ のとき，

$\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}=\left(\boxed{\text{ウエ}},\ \boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カキ}}\right)$ である。

また，$\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$ の大きさは $\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

3　$\vec{a}=(1,\ 0,\ -1)$，$\vec{b}=(0,\ 2,\ 3)$，$\vec{c}=(-1,\ 2,\ 0)$ のとき，

$\vec{p}=(1,\ 8,\ 3)$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと，

$$\vec{p}=\boxed{\text{コ}}\,\vec{a}+\boxed{\text{サ}}\,\vec{b}+\boxed{\text{シ}}\,\vec{c}$$

である。

PART3　ベクトルの成分と演算，座標と成分表示

例題

(1) $\vec{a}=(1,\ -1,\ 2)$，$\vec{b}=(0,\ 2,\ 1)$，$\vec{c}=(2,\ -1,\ -2)$ のとき，$|\vec{a}|$ を求めよ。また，$2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ を成分で表し，その大きさを求めよ。

(2) $\vec{a}=(1,\ -2,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ -2)$，$\vec{c}=(3,\ -2,\ -2)$ のとき，$\vec{p}=(-2,\ 3,\ -2)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$

$2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=2(1,\ -1,\ 2)-3(0,\ 2,\ 1)+(2,\ -1,\ -2)$

$=(2,\ -2,\ 4)+(0,\ -6,\ -3)+(2,\ -1,\ -2)=(4,\ -9,\ -1)$

$|2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{4^2+(-9)^2+(-1)^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$

(2) $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおくと

$(-2,\ 3,\ -2)=s(1,\ -2,\ -1)+t(1,\ -1,\ -2)+u(3,\ -2,\ -2)$

$=(s+t+3u,\ -2s-t-2u,\ -s-2t-2u)$

よって

$s+t+3u=-2$ …… ①

$-2s-t-2u=3$ …… ②

$-s-2t-2u=-2$ …… ③

①＋②より　$-s+u=1$ …… ④

①×2＋③より　$s+4u=-6$ …… ⑤

④，⑤より　$s=-2,\ u=-1$　　このとき，①より　$t=3$

したがって　$\vec{p}=-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$

練習

(1) $\vec{a}=(3,\ 1,\ 4)$，$\vec{b}=(-1,\ 6,\ 3)$，$\vec{c}=(-2,\ 5,\ 4)$ のとき，$|\vec{c}|$ を求めよ。また，$2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$ を成分で表し，その大きさを求めよ。

(2) $\vec{a}=(0,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 2,\ -3)$，$\vec{c}=(3,\ 4,\ -1)$ のとき，$\vec{p}=(-6,\ 7,\ -3)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

(1) $|\vec{c}|=\sqrt{(-2)^2+5^2+4^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

$2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}=2(3,\ 1,\ 4)+(-1,\ 6,\ 3)-3(-2,\ 5,\ 4)$

$=(6,\ 2,\ 8)+(-1,\ 6,\ 3)+(6,\ -15,\ -12)=(11,\ -7,\ -1)$

$|2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}|=\sqrt{11^2+(-7)^2+(-1)^2}=\sqrt{171}=3\sqrt{19}$

(2) $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおくと

$(-6,\ 7,\ -3)=s(0,\ 1,\ 1)+t(-1,\ 2,\ -3)+u(3,\ 4,\ -1)$

$=(-t+3u,\ s+2t+4u,\ s-3t-u)$

よって

$-t+3u=-6$ ……①

$s+2t+4u=7$ ……②

$s-3t-u=-3$ ……③

②−③より　$t+u=2$

これと①より　$t=3$，$u=-1$

このとき，②より　$s=5$

したがって　$\vec{p}=5\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$

第14講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイ：14

[解説]

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}$ [A]

$=\sqrt{\mathbf{14}}$

> [A]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ のとき,
> $|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$

2

[正解] ウエ：-2,　オ：2,　カキ：-7,　クケ：57

[解説]

$\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$ [B]

$=(1,\ 0,\ -1)-2(0,\ 2,\ 3)+3(-1,\ 2,\ 0)$

$=(1,\ 0,\ -1)+(0,\ -4,\ -6)+(-3,\ 6,\ 0)$

$=(\mathbf{-2,\ 2,\ -7})$ [C]

よって，$\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$ の大きさは,

$|\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-7)^2}$

$=\sqrt{\mathbf{57}}$

> [B]　平面ベクトルと同じように計算する。

> [C]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$,
> $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき
> $\vec{a}+\vec{b}=(a_1,\ a_2,\ a_3)+(b_1,\ b_2,\ b_3)$
> $=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$
> $\vec{a}-\vec{b}=(a_1,\ a_2,\ a_3)-(b_1,\ b_2,\ b_3)$
> $=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$
> $ka_1=k(a_1,\ a_2,\ a_3)$
> $=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$　(k は実数)

3 **[正解]** コ：3，サ：2，シ：2

[解説]

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$（$s$，$t$ は実数）とおくと [D]

$$(1,\ 8,\ 3)$$
$$=s(1,\ 0,\ -1)+t(0,\ 2,\ 3)+u(-1,\ 2,\ 0)$$ [E]

つまり

$$(1,\ 8,\ 3)=(s-u,\ 2t+2u,\ -s+3t)$$

よって

$s-u=1$　……①

$2t+2u=8$　……②

$-s+3t=3$　……③

①，②より，$s+t=5$　……④

③，④より，$s=3$，$t=2$

このとき，①より　$u=2$

よって　$\boldsymbol{\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}}$

[D]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が同一平面上にないとき，空間内の任意のベクトル $\vec{p}$ は，実数 s，t，u を用いて
$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$
の形で，ただ 1 通りに表すことができる。

[E]　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおいて，両辺を成分で表す。